1-forme chiuse in $\mathbb{R}^2$

Derivazione sotto il segno dell'integrale

Lemma 1 (Derivazione sotto il segno dell'integrale)**.** *Sia $\mathcal{R} = (A, B) \times (C, D)$ un rettangolo aperto in $\mathbb{R}^2$. Sia $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\mathcal{R})$ e sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato contenuto in (A, B). Allora, la funzione*

$$F : (C, D) \to \mathbb{R}, \qquad F(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx$$

è derivabile su (C, D) e per ogni $y \in (C, D)$ si ha

$$F'(y) = \int_a^b \partial_y f(x, y)\, dx.$$

Dimostrazione: Sia $h \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x, y+h)\, dx - \int_a^b f(x, y)\, dx\right)\\ &= \int_a^b \frac{1}{h}\Big(f(x, y+h) - f(x, y)\Big)\, dx\end{aligned}$$

Per il Teorema gi Lagrange abbiamo che, per ogni $x \in [a, b]$ e $h \in \mathbb{R}$ esiste $\xi_{x,h}$ tale che $|\xi_{x,h}| \le |h|$ e

$$\frac{1}{h}\Big(f(x, y+h) - f(x, y)\Big) = \partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big).$$

Inoltre, l'uniforme continuità di $\partial_y f$ implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\text{se} \quad |y' - y| < \delta \quad \text{allora} \quad \big|\partial_y f(x, y') - \partial_y f(x, y)\big| < \varepsilon\ .$$

In particolare, quando $|h| < \delta$,

$$\big|\partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big) - \partial_y f(x, y)\big| < \varepsilon\ .$$

Di conseguenza, sempre quando $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) - \int_a^b \partial_y f(x, y)\, dx\right| &= \left|\int_a^b \partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big)\, dx - \int_a^b \partial_y f(x, y)\, dx\right|\\ &\le \int_a^b \big|\partial_y f\big(x, y + \xi_{x,h}\big) - \partial_y f(x, y)\big|\, dx\\ &\le (a - b)\varepsilon.\end{aligned}$$

In conclusione,

$$\lim_{h \to 0} \left|\frac{1}{h}\Big(F(y+h) - F(y)\Big) - \int_a^b \partial_y f(x, y)\, dx\right| = 0.$$

□

1-forme chiuse in domini rettangolari

Teorema 2 (Chiusa $\Rightarrow$ esatta)**.** *Consideriamo il rettangolo*

$$\mathcal{R} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2.$$

Sia α una 1-forma chiusa di classe C^1 su $\mathcal{R}$. Allora α è esatta.

Dimostrazione. Consideriamo la 1-forma

$$\alpha := a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy,$$

e ricordiamo che

$$\alpha \text{ è chiusa} \ \Leftrightarrow\ d\alpha = 0 \ \Leftrightarrow\ \partial_y a = \partial_x b \text{ in } \mathcal{R}.$$

Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ e per ogni $(x, y) \in \mathcal{R}$ definiamo la funzione

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} b(x, s)\, ds.$$

Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\Big(F(x, y+k) - F(x,y)\Big) = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \int_{y}^{y+k} b(x, s)\, ds = b(x, y).$$

Inoltre, nella direzione x, abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(F(x+h, y) - F(x,y)\Big) &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} a(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} b(x+h, s)\, ds\right) - \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} a(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} b(x, s)\, ds\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} a(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h}\Big(b(x+h, s) - b(x, s)\Big)\, ds
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(F(x+h, y) - F(x,y)\Big) &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_x b(x, s)\, ds \qquad \text{(abbiamo derivato sotto il segno dell'integrale)} \\
&= a(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_y a(x, s)\, ds \qquad \text{(qui abbiamo usato che } \partial_y a = \partial_x b\text{)} \\
&= a(x, y_0) + \big(a(x,y) - a(x, y_0)\big) \\
&= a(x, y).
\end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che F è derivabile in ogni punto di $\mathcal{R}$ e le sue derivate parziali sono:

$$\partial_x F(x,y) = a(x,y) \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x,y) = b(x,y).$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
dF &= \partial_x F(x,y)\, dx + \partial_y F(x,y)\, dy \qquad \text{(per definizione della derivata esterna)} \\
&= a(x,y)\, dx + b(x,y)\, dy.
\end{aligned}$$

La forma α è quindi esatta. $\square$

1-forme chiuse in domini normali in $\mathbb{R}^2$

Teorema 3. *Siano*

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad g : [a,b] \to \mathbb{R}$$

due funzioni continue su $[a,b]$ *e tali che*

$$f(x) < g(x) \quad \text{per ogni} \quad a < x < b.$$

Sia Ω *l'insieme aperto*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x < b,\ f(x) < y < g(x)\Big\}.$$

Dimostrare che su Ω *ogni* 1*-forma chiusa è esatta.*

Lemma 4. *Siano*

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad g : [a,b] \to \mathbb{R}$$

due funzioni continue su $[a,b]$ *e tali che*

$$f(x) < g(x) \quad \text{per ogni} \quad a < x < b.$$

Allora, esiste una funzione

$$h : (a,b) \to \mathbb{R}$$

di classe C^1 *tale che*

$$f(x) < h(x) < g(x) \quad \text{per ogni} \quad a < x < b.$$

Proof. Prima dimostrare che esiste una funzione

$$q : (a, b) \to \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà:

- q è continua;
- $f(x) < q(x) < g(x) \quad \text{per ogni} \quad a < x < b$;
- q è lineare a tratti su ogni intervallo della forma $(a - \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})$.

Costruire h a partire da q. □

Osservazione 5. *Se f e g sono C^1, possiamo semplicemente prendere $h = \frac{1}{2}(f + g)$.*

Dimostrazione del teorema. Sia

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy.$$

una 1-forma chiusa di classe C^1 su Ω. Fissiamo un punto

$$a < x_0 < b$$

e, per ogni $(x, y) \in \Omega$ definiamo

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} \Big[a\big(t, h(t)\big) + h'(t)\, b\big(t, h(t)\big) \Big]\, dt + \int_{h(x_0)}^{y} b(x, s)\, ds.$$

A questo punto basta dimostrare che

$$\partial_x F(x, y) = a(x, y) \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x, y) = b(x, y).$$

□

Esercizio 6. *Completare la dimostrazione del teorema derivando sotto il segno dell'integrale.*